Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, для ИУ9
теоретические вопросы для подготовки к РК–3, 2012

1. Дайте определение внутренних, граничных, изолированных и предельных точек множеств, открытых, замкнутых и линейно связных множеств, окрестностей и областей в $\mathbb{R}^n$.

2. Дайте определение открытых, ограниченных и замкнутых множеств, окрестностей и компактов в $\mathbb{R}^n$. Сформулируйте критерий компактности множеств в $\mathbb{R}^n$.

3. Дайте определение топологического пространства. Сформулируйте условие Хаусдорфа. Приведите пример хаусдорфова пространства.

4. Определите структуру хаусдорфова топологического пространства в $\mathbb{R}^n$.

5. Дайте определение предела последовательности в $\mathbb{R}^n$, сходящейся, расходящейся и фундаментальной последовательности. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

6. Дайте определение функции многих переменных, ее графика и координатных функций векторной функции многих переменных. Сформулируйте определение предела функции многих переменных по базе, две основные базы и теорему об эквивалентности определений предела функции.

7. Сформулируйте свойства предела функции: теоремы о единственности предела, о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, и о пределе сложной функции.

8. Дайте определение предела функции многих переменных в точке. Сформулируйте теорему о пределе ограничения функции на подмножество. Приведите пример использования этой теоремы для доказательства расходимости предела функции.

9. Дайте определение непрерывной функции многих переменных в точке и точек разрыва функции. Сформулируйте теоремы об эквивалентности определений непрерывности и о связи непрерывности векторной функции и ее координатных функций.

10. Дайте определение непрерывной функции многих переменных в точке. Сформулируйте локальные свойства непрерывных функций.

11. Дайте определение функций, непрерывных на множествах в $\mathbb{R}^n$. Сформулируйте теоремы о прообразах открытых множеств и о непрерывных отображениях компактов и линейно связных множеств.

12. Дайте определение функций, непрерывных на множествах в $\mathbb{R}^n$. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на компактах и на линейно связных множествах.

13. Дайте определение полного приращения, дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте теорему о покоординатной дифференцируемости векторной функции.

14. Дайте определение и геометрическую интерпретацию частной производной функции многих переменных. Сформулируйте первое необходимое условие дифференцируемости. На примере покажите, что это условие не являются достаточным.

15. Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте второе необходимое условие дифференцируемости. На примере покажите, что это условие не являются достаточным.

16. Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости и определение непрерывно дифференцируемой функции многих переменных.

17. Дайте определение частной производной и матрицы Якоби функции многих переменных. Сформулируйте свойство линейности и правило Лейбница для дифференциала и матрицы Якоби функции многих переменных.

18. Дайте определение матрицы Якоби векторной функции. Сформулируйте теорему о дифференцировании сложной функции и цепное правило.

19. Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте свойство инвариантности дифференциала функции многих переменных и геометрическую интерпретацию этого свойства.

20. Дайте определение частных производных высших порядков и матрицы Гессе функции многих переменных. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных. Приведите пример функции, смешанные производные которой неравны.

21. Дайте определение дифференциалов высших порядков. Сформулируйте теорему Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и формулу конечных приращений.

22. Дайте определение дифференциалов высших порядков и линейного приближения функции. Сформулируйте теорему Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано.

23. Дайте определение и геометрическую интерпретацию производной по направлению. Сформулируйте теорему о производной по направлению дифференцируемой функции и формулу связи производной по направлению и градиента.

24. Дайте определение градиента функции многих переменных. Сформулируйте его пять свойств.

25. Дайте определение касательной плоскости и нормали к поверхности. Сформулируйте теорему о их существовании и уравнениях. Дайте геометрическую интерпретацию дифференциала функции двух переменных.

26. Сформулируйте теорему о неявной функции в общем случае. Дайте ее геометрическую интерпретацию для случая одного уравнения с двумя неизвестными.

Типовой вариант задач

1. Для функции $z = f[\sin(x + y^2);\ x^3 y]$ найти dz.

(2 балла)

2. Для функции z, заданной неявно уравнением $f(y^2 z;\ \ln(xz)) = 0$, найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(3 балла)

3. Для функции $u = x^3 - y^3 + z^2$ в точке $M(1, 2, 1)$ найти: а) производную по направлению $\overrightarrow{MN}$, где $N(4, 7, -2)$; б) градиент. *(2 балла)*

4. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + \cos \dfrac{z\pi}{y}$, в точке $(1, 2, 1)$. *(2 балла)*

5. Найти отображение $g \circ f$ и матрицы Якоби отображений f, g, $g \circ f$, где

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1;\ x_2) = (x_1 + x_2^2;\ x_1 - x_2^2;\ x_1^2 + x_2^4), \quad g(y_1;\ y_2;\ y_3) = (y_1 y_2;\ y_1 y_2 y_3).$$

В точке $a = (1, 1)$ проверить тождество $(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a)$, $b = f(a)$. *(3 балла)*